1 | Zykelzerlegung

Zerlegen Sie folgende Permutationen in Zykel und berechnen Sie jeweils das Signum! Geben Sie außerdem die inversen Permutationen α^{-1}, β^{-1} und γ^{-1} an!

$$\alpha := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 10 & 3 & 4 & 5 & 6 & 9 & 8 & 7 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= (1\ 10\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 9) \circ (7\ 8) \qquad \tfrac{1}{2}$$

$$\operatorname{sgn}(\alpha) = (-1)^7 \cdot (-1)^1 = 1 \qquad \tfrac{1}{2}$$

$$\alpha^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 9 & 10 & 2 & 3 & 4 & 5 & 8 & 7 & 6 & 1 \end{pmatrix} \qquad \tfrac{1}{2}$$

1,5

$$\beta := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 11 & 3 & 1 & 2 & 10 & 9 & 5 & 7 & 8 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= (1\ 11\ 4\ 2\ 3) \circ (5\ 10\ 6\ 9\ 8\ 7)$$

$$\operatorname{sgn}(\beta) = (-1)^4 \cdot (-1)^5 = -1$$

$$\beta^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 3 & 4 & 2 & 11 & 7 & 10 & 8 & 9 & 6 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

1,5

$$\gamma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ n & n-1 & n-2 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$\frac{n}{2}$ Transpositionen

$$= \begin{cases} (1\ n) \circ (2\ \ n-1) \circ (3\ \ n-2) \circ \dots \circ \left(\frac{n}{2}\ \ \frac{n}{2}+1\right) & \text{falls } n \text{ gerade} \\ (1\ n) \circ (2\ \ n-1) \circ \dots \circ \left(\frac{n+1}{2}-1,\ \frac{n+1}{2}+1\right) & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

3/4

$\frac{n+1}{2} - 1 = \frac{n-1}{2}$ Transpositionen

$$\operatorname{sgn}(\gamma) = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} & \text{falls } n \text{ gerade} \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$ $\frac{3}{4}$

$\gamma^{-1} = \gamma$ $\frac{1}{2}$

für γ: 2

2 | Kleingruppen

Die **Verknüpfungstabelle** einer Gruppe $(G, *)$ hat eine Zeile für jedes Element $x \in G$ und eine Spalte für jedes Element $y \in G$. Sei weist in Zeile x und Spalte y den Wert von $x * y$ aus.

(a) Wie sehen die Verknüpfungstabellen von $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ aus (siehe Blatt 4, Aufgabe 2)?

2 ($\frac{1}{2}$ Punkt pro vollständig richtiger Tabelle)

$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$:

+	[0]	[1]
[0]	[0]	[1]
[1]	[1]	[0]

$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$:

+	[0]	[1]	[2]
[0]	[0]	[1]	[2]
[1]	[1]	[2]	[0]
[2]	[2]	[0]	[1]

$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$

+	[0]	[1]	[2]	[3]
[0]	[0]	[1]	[2]	[3]
[1]	[1]	[2]	[3]	[0]
[2]	[2]	[3]	[0]	[1]
[3]	[3]	[0]	[1]	[2]

$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

+	([0],[0])	([0],[1])	([1],[0])	([1],[1])
([0],[0])	([0],[0])	([0],[1])	([1],[0])	([1],[1])
([0],[1])	([0],[1])	([0],[0])	([1],[1])	([1],[0])
([1],[0])	([1],[0])	([1],[1])	([0],[0])	([0],[1])
([1],[1])	([1],[1])	([1],[0])	([0],[1])	([0],[0])

Tipp für (b–d): Zeigen Sie zunächst, dass für jedes Element y einer Gruppe $(G, *)$ die durch $x \mapsto x * y$ und $x \mapsto y * x$ definierten Abbildungen $G \to G$ Bijektionen sind. Dann folgt, dass in der Verknüpfungstabelle in jeder Zeile jedes Element von G genau einmal auftritt, und dass auch in jeder Spalte jedes Element von G genau einmal auftritt.

½ Punkt falls keine Punkte für (b) & (c)

$G \to G$, $x \mapsto x * y$ ist bijektiv mit Umkehrabbildung $G \to G$, $x \mapsto x * y^{-1}$

$G \to G$, $x \mapsto y * x$ ist bijektiv mit Umkehrabbildung $G \to G$, $x \mapsto y^{-1} * x$

(b) Jede Gruppe mit zwei Elementen ist isomorph zu $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

1

Sei $G = (\{a, b\}, *)$ mit $a \neq b$.

Ein Element muss neutral sein, sagen wir a. Dann gibt es nur eine mögliche Verknüpfungstabelle:

$*$	a	b
a	a	b
b	b	a

¾ bis hier

Definiere $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{f} \{a, b\}$

$[0] \mapsto a$

$[1] \mapsto b$

+ ¼

Offenbar f bijektiv. Anhand der Tabellen sieht man: f Homomorphismus.

(c) Jede Gruppe mit drei Elementen ist isomorph zu $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

1

Sei $G = (\{a,b,c\}, *)$ mit $|\{a,b,c\}| = 3$.
Sei wieder a neutral.
Wieder gibt es nur eine mögliche Verknüpfungstabelle:

$*$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	a	?
c	c	c	?

geht nicht

$*$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

3/4 bis hier

Definiere $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{f} \{a,b,c\}$

$$[0] \longmapsto a$$
$$[1] \longmapsto b$$
$$[2] \longmapsto c$$

+1/4

und argumentiere wie oben.

(d) Ist die Gruppe $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ isomorph zu $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$?

1

Nein:

Für jedes Element $y \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ gilt: $\boxed{y + y = 0.}$

Angenommen $f: \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ wäre ein Gruppenisomorphismus. Dann würde insbesondere folgen:

$$f([2]) = f([1]+[1]) = f([1]) + f([1])$$
$$= 0 = f([0])$$

f Homomorphismus

Also $f([2]) = f([0])$ obwohl $[2] \neq [0]$ in $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$

$\lightning$ Injektivität von f.